

Desain Pola Grafis Berdasarkan Untai Thue-Morse

Ahmad Sabri

Jurusan Teknik Informatika
 Universitas Gunadarma, Depok
 E-mail:sabri@staff.gunadarma.ac.id

Abstrak

Artikel ini membahas sebuah metoda desain pola grafis yang dihasilkan berdasar dari untaian Thue-Morse. Simbol 0 dan 1 pada untaian masing-masing mewakili sebuah pola dasar yang direpresentasikan oleh dua matriks berukuran sama. Pola agregat dihasilkan dengan mengatur rangkaian pola dalam susunan persegi, menurut susunan untaian Thue-Morse panjang 2^{2n} . Visualisasi pola dilakukan pada bidang grid. Variasi pola bersumber pada pola dasar, dan panjang untaian yang digunakan. Pada bagian akhir artikel ini diberikan 5 contoh pola yang dihasilkan.

Kata Kunci : untaian Thue-Morse, algoritma, visualisasi pola, matriks

Pendahuluan

Untaian Thue-Morse [1] adalah untaian biner yang diawali oleh 0, kemudian diikuti oleh komplemen biner dari untaian yang mendahuluinya. Sebagai contoh, prefiks untaian Thue-Morse dengan panjang 1, 2, 4, dan 8 berturut-turut adalah 0, 01, 0110, 01101001. Untaian Thue-Morse diterapkan antara lain dalam fair division yang menguraikan metode pembagian sebuah entitas secara bergiliran dengan adil [2], dan fairness competition untuk mengatur pergiliran pemain dalam sebuah kompetisi [3]. Sejumlah penelitian mengkonversi representasi untaian Thue-Morse menjadi pola visual, dengan memanfaatkan sifat fraktal [4,5], aritmetika modular dan aritmetika shaft [6]. Konversi visual menghasilkan pola-pola yang artistik dengan tak hingga banyaknya variasi kemungkinan. Artikel ini mengusulkan desain pola grafis menggunakan metode konversi visual untaian Thue-Morse dengan pemetaan simbol 0 dan 1 ke himpunan pola yang telah didefinisikan dalam bentuk matriks. Metode konversi diaplikasikan dalam sebuah algoritma yang membangkitkan untaian Thue-Morse dengan panjang 2^{2n} , yang selanjutnya dikonversi menjadi agregat pola dalam grid berukuran $2^n \times 2^n$. Sejauh penelusuran, literatur belum menyajikan pembahasan dengan menggunakan metode tersebut.

Metode Pembangkitan Pola

Berdasarkan [7], konstruksi untaian Thue-Morse $T = t_0 t_1 t_2 \dots$ diberikan oleh:

$$T = \lim_{n \rightarrow \infty} \varphi^n(0),$$

di mana $\varphi : \{0, 1\}^* \rightarrow \{0, 1\}^*$ adalah morfisma

yang didefinisikan sebagai $\varphi(0) = 01$ dan $\varphi(1) = 10$.

Berdasarkan konstruksi ini, maka panjang untaian Thue-Morse pada iterasi ke n adalah 2^{2n} . Sebagai contoh:

$$\begin{aligned} \varphi(0) &= 01 \\ \varphi^2(0) &= \varphi(01) = 0110 \\ \varphi^3(0) &= \varphi(0110) = 01101001 \end{aligned}$$

Pada artikel ini, untaian Thue-Morse $\varphi^{2n}(0)$ digunakan sebagai aturan dalam menyusun pola, di mana 0 dan 1 masing-masing mewakili sebuah pola yang didefinisikan. Penggunaan parameter $2n$ ditujukan agar untaian dapat disusun sebagai entri-entri matriks persegi berukuran $2^n \times 2^n$, yang disebut sebagai matriks untaian.

Langkah selanjutnya adalah mendefinisikan pemetaan $b : \{0, 1\} \rightarrow M_{p \times q}$. Matriks hasil pemetaan memiliki dimensi $p \times q$, dengan entri-entri-nya adalah 0 atau 1. Kemudian, seluruh entri pada matriks untaian dipetakan oleh b , sehingga menghasilkan matriks berukuran $2^n \times 2^n$ dengan entri-entri-nya adalah $b(0)$ dan $b(1)$. Pemetaan b adalah trivial jika $b(0) = [0]$ dan $b(1) = [1]$. Kemudian dilakukan operasi *concatenation* antar kolom dan antar baris sehingga dihasilkan matriks berukuran $(2^n)p \times (2^n)q$, yang disebut matriks agregat pola, dan dinotasikan sebagai \mathbf{A} .

Setelah itu dilakukan visualisasi berdasarkan matriks \mathbf{A} pada grid berukuran $(2^n)p \times (2^n)q$. Visual dari entri $\mathbf{A}[i, j]$ adalah mengisi grid pada koordinat (i, j) , dengan putih jika $\mathbf{A}[i, j] = 0$, dan hitam jika $\mathbf{A}[i, j] = 1$. Grid posisi $(0, 0)$ berada pada kiri atas.

Hasil dan Pembahasan

Pembangkitan untai Thue-Morse di- berikan oleh algoritma pada Gambar 1.

$$b(0) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \tag{1}$$

$$b(1) = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

```
input n

m:=2*n

t:=[0,1]

for i:=2 to m

    t_rev:=[1-t[j] for j:=0 to(len(t)-
        1)]

    t:=concat(t,t_rev)
```

Gambar 1: Algoritma pembangkit untai Thue Morse

Fungsi concat digunakan untuk menyambung dua untai. Sebagai contoh, concat ([0 1],[1 0]) menghasilkan untai 0 1 1 0.

Untuk input n = 2, maka m = 4, sehingga dihasilkan untai Thue-Morse dengan panjang $2^m = 2^4 = 16$ yaitu:

$$[0\ 1\ 1\ 0\ 1\ 0\ 0\ 1\ 1\ 0\ 0\ 1\ 0\ 1\ 1\ 0],$$

Matriks untai berukuran $2^2 \times 2^2$ yang dihasilkan adalah sebagai berikut:

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \end{bmatrix} \tag{2}$$

Setelah untai Thue-Morse panjang 2^n dihasilkan, langkah selanjutnya adalah mendefinisikan pemetaan $b : \{0, 1\} \rightarrow M_{p \times q}$. Berikut adalah contoh pendefinisian pemetaan b:

Pemetaan baris pertama dari matriks (1) di atas menghasilkan $[b(0)\ b(1)\ b(1)\ b(0)]$ yaitu:

$$\left[\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \right]$$

Pemetaan serupa dilakukan pula untuk baris-baris berikutnya dari matriks untai. Setelah seluruh entri dipetakan, dilakukan *concatenation* antar

baris dan antar kolom untuk menghasilkan matriks pola agregat **A**. Untuk contoh matriks (1) dengan pemetaan pada (2), dihasilkan matriks **A** berukuran 12×12 sebagai berikut:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Algoritma pemetaan dan concatenation antar kolom dan baris diberikan dalam Gambar 2:

```
input n

m:=2*n

t:=[0,1]

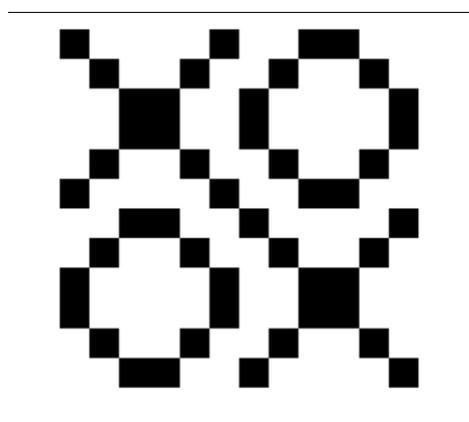
for i:=2 to m

    t_rev:=[1-t[j] for j:=0 to(len(t)-
        1)]

    t:=concat(t,t_rev)
```

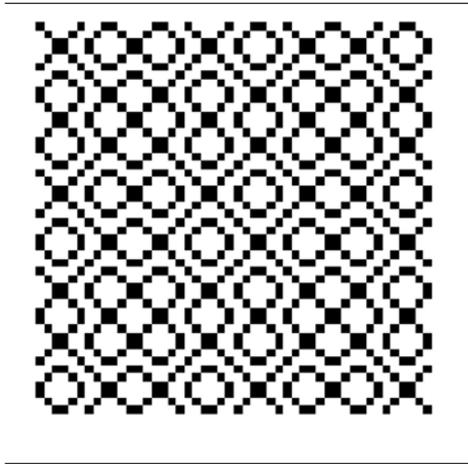
Gambar 2: Algoritma pemetaan untai dan concatenation antar baris dan kolom

Visualisasi matriks A yang diberikan pada (3) menghasilkan pola pada Gambar 3.



Gambar 3: Visual matriks A pada grid, untuk n = 2.

Pola pada Gambar 3 dihasilkan dengan input parameter $n = 2$. Untuk $n = 4$ dihasilkan untai yang lebih panjang, sehingga memberikan efek duplikasi dan zoom out sebagaimana ditunjukkan oleh Gambar 4.



Gambar 4: Visual matriks A pada grid, untuk $n = 4$.

Tabel 1 menyajikan beberapa variasi pola yang dihasilkan berdasarkan pemetaan b dan n yang berbeda.

Tabel 1: Beberapa pola terinduksi untai Thue-Morse.

#	Parameter	Pola
1	$n = 3$ $b(0) = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$ $b(1) = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$	
2	$n = 4$ $b(0) = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$ $b(1) = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$	

3	$n = 4$ $b(0) = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$ $b(1) = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$	
4	$n = 4$ $b(0) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$ $b(1) = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$	
5	$n = 3$ $b(0) = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$ $b(1) = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$	

Penutup

Metode visualisasi untai Thue-Morse yang dibahas pada penulisan ini memberikan variasi desain pola yang tidak terbatas, dengan cara mengatur parameter pola berupa fungsi b dan ukuran pola n . Algoritma dapat dikembangkan agar pola dapat dibangkitkan dengan memasukkan aspek pewarnaan, maupun berdasarkan untai tak-hingga lainnya, seperti untai Fibonacci.

Daftar Pustaka

- [1] A. Thue, Uber unendliche Zeichenreihen, Norske vid. Selsk. Skr. Mat. Nat. Kl, 7, hal. 1-22, 1906. Dicitak kembali dalam Selected mathematical papers of Axel Thue, editor T.

- Nagell, Universitets- forlaget, Oslo, hal. 139-158, 1977.
- [2] S.J. Brams & A.D. Taylor, "An envy-free cake division protocol", The American Mathematical Monthly, Mathematical Association of America, 102 (1), hal. 9-18, 1995.
- [3] I.I. Palacios-Huerta, "Tournaments, fairness and the Prouhet-Thue- Morse sequence", Economic Inquiry, 50(3), hal. 848-849, 2012.
- [4] R.E. Griswold, "Drafting with sequences", http://www.cs.arizona.edu/patterns/weaving/webdocs/gre_seqd.pdf, 2002, diakses 16 Mei 2019.
- [5] M. Gilleland, "Some self-similar Integer Sequences", <http://www.research.att.com/~njas/sequences/selfsimilar.html>, 2002, diakses 16 Mei 2019.
- [6] M. Schroeder, Fractals & Chaos, "Power Laws: Minutes from an Infinite Paradise", W. H. Freeman, 1991.
- [7] S. Brlek, "Enumerations of factors in the Thue-Morse word", Discrete Applied Mathematics, 24, hal. 83-86, 1989.