# Tinjauan terhadap untai Thue-Morse sebagai induksi dari pembangkitan untai biner dengan metode ECO

Ahmad Sabri

Jurusan Teknik Informatika
Universitas Gunadarma, Depok
E-mail : sabri@staff.gunadarma.ac.id

**Abstrak**

Pada paper ini, metode ECO digunakan untuk membangkitkan secara ekshaustif untai biner. Aturan suksesi $\Omega$ yang digunakan dalam pembangkitan ini menginduksi untai Thue-Morse. Selanjutnya ditunjukkan bahwa faktor dari untai Thue-Morse adalah untai biner yang menghindari 00100, 11011 dan untai biner berpola $0u0u0$ atau $1u1u1$. Pada bagian akhir diberikan algoritma pembangkit efisien yang dirancang berdasar aturan suksesi .

***Kata Kunci***: Untai biner, untai Thue-Morse, metode ECO, aturan suksesi, algoritma pembangkit

## Pendahuluan

Pembangkitan objek kombinatorial dengan menggunakan metode ECO (enumeration of combinatorial objects) digagas oleh Barcucci dan rekan [1]. Paper terebut memberikan konstruksi ECO untuk tree, path, poliomino, dan permutasi. Penelitian lanjutan memberikan konstruksi ECO untuk permutasi Lucas dan Fibonacci [2], objek-objek Gray structure [3], pembangkitan objek dalam susunan kode Gray untuk untai Dyck, grand Dyck, Motzkin dan Schroeder [4], serta involusi dan derangements [5].

Untai Thue-Morse [6] adalah untai biner yang diawali oleh 0, kemudian diikuti oleh komplemen biner dari untai yang mendahuluinya. Sebagai contoh, prefiks untai Thue-Morse dengan panjang 1, 2, 4, dan 8 berturut-turut adalah 0, 01, 0110, 01101001. Untai Thue-Morse diterapkan antara lain dalam fair division [7] yang menguraikan metode pembagian sebuah entitas secara bergiliran dengan adil, dan fairness competition [8] untuk mengatur pergiliran pemain dalam sebuah kompetisi.

Sejauh penelusuran penulis, belum terdapat penelitian yang memberikan konstruksi ECO untuk pembangkitan untai Thue-Morse, baik konstruksi langsung maupun konstruksi yang menginduksi untai Thue-Morse. Pada paper ini ditunjukkan pembangkitan untai biner dengan metode ECO yang menginduksi untai Thue Morse, serta beberapa sifat terkait. Pada bagian akhir diberikan algoritma pembangkit efisien untuk untai biner berdasarkan metode ECO.

### Notasi dan Definisi

Diberikan sebuah kelas objek kombinatorial $S$ dan parameter $p$ dari $S$. Didefinisikan himpunan $S_n = \{x \in S : p(x) = n\}$. Jika terdapat sebuah operator $\vartheta$ yang memenuhi syarat berikut:

1. Jika $x_1$,$x_2 \in S_n$ dan $x_1 \neq x_2$, maka $\vartheta(x_1) \cap \vartheta(x_2) = \phi$
2. Untuk setiap $y \in S_{n+1}$,$n \geq 0$ terdapat $x \in S_n$ sedemikian sehingga $y \in \vartheta(x)$ .

maka $\{\vartheta(x)\}_{x \in S_n}$, $n \geq 0$ adalah sebuah partisi dari $S_{n+1}$ dan $\vartheta$ disebut operator ECO. Dengan kata lain, definisi tersebut menyatakan bahwa setiap objek $y \in S_{n+1}$ dapat dibentuk dari objek pada $x \in S_n$ , di mana sebuah $y \in S_{n+1}$ tepat diperoleh dari sebuah $x \in S_n$.

Dalam paper ini, operator ECO dinyatakan dalam sebuah aturan suksesi. Sebuah aturan suksesi $\Omega$ atas himpunan integer berindeks $\Sigma$

terdiri dari sebuah integer $k$ sebagai root, dan serangkaian himpunan produksi dalam bentuk

$$\{(k) \to (e_1(k))(e_2(k))...(e_k(k))\}_{k\in\Sigma}$$

dengan $e_i(k) \in \Sigma, 1 \le i \le |k|$, dan $|k| = k_a$.

Himpunan produksi di atas menunjukkan bahwa integer $(k)$ memiliki $k$ produksi (subordinat) dengan label $(e_1(k))(e_2(k))...(e_k(k))$.

Untuk menghindari ambiguitas, integer $a$ berindeks $i$ dituliskan dalam format $(a)_i$. Sebagai contoh $(12)_3$ bermakna bahwa integer yang berindeks adalah 12, bukan 2. Jika semua integer hanya memiliki sebuah indeks, maka penggunaan indeks dapat diabaikan.

Produksi berdasarkan aturan suksesi menginduksi pohon pembangkitan dengan $k$ sebagai root-nya. Root didefinisikan berada pada level 0, dan simpul-simpul produksi pada level berikutnya dibentuk mengikuti aturan suksesi sebagaimana yang didefinisikan. Sebuah untai direpresentasikan sebagai tupel $\boldsymbol{s} = s_1s_2...s_n$ dan notasi $|\boldsymbol{s}| = n$ adalah panjang untai $\boldsymbol{s}$. Sebuah faktor dari untai $s_1s_2...s_n$ adalah untai $s_is_{i+1}...s_m$ di mana $1 \le i \le m \le n$. Sebagai contoh, untai 1214530 memiliki faktor-faktor antara lain 214, 1453, 14530, dan 2145.

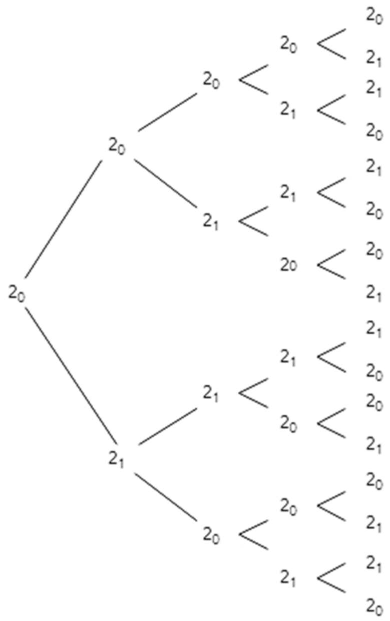
Sebuah untai $s_1s_2...s_n$ dikatakan menghindari sebuah untai $u_1u_2...u_m$ jika $u_1u_2...u_m$ bukan merupakan faktor dari $s_1s_2...s_n$ [9]. Mengadaptasi definisi yang diberikan dalam [10], untai $t_1t_2...t_n$ atas alfabet $\{0,1\}$adalah untai Thue-Morse jika $t_1 = 0$, $t_{2n} = t_n$, $t_{2n-1} = t_{2n}$ untuk semua $n \ge 1$, di mana $t = 1 - t$.

## Hasil dan Pembahasan

Didefinisikan aturan suksesi $\Omega$ berikut:

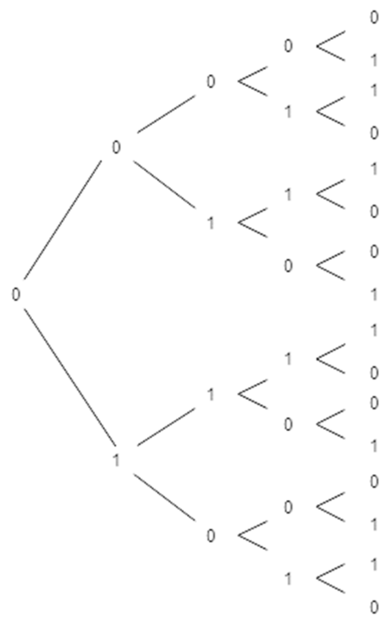
$$\Omega \begin{cases} (2)_0 & \\ (2)_0 & \to \quad (2)_0(2)_1 \\ (2)_1 & \to \quad (2)_1(2)_0 \end{cases}$$

Pohon pembangkitan yang diinduksi oleh $\Omega$ memiliki root $(2)_0$ yang memproduksi simpul-simpul $(2)_0$ dan $(2)_1$. Setiap simpul $(2)_0$ pada level selanjutnya berkembang menjadi dua simpul berurutan $(2)_0$ dan $(2)_0$, sedangkan setiap simpul $(2)_1$ berkembang menjadi dua simpul berurutan $(2)_1$ dan $(2)_0$ . Pohon pembangkitan sampai level 4 ditunjukkan pada gambar 1.



Gambar 1: Pohon pembangkitan yang diinduksi oleh $\Omega$

Dengan hanya memandang indeksnya saja, maka diperoleh pohon pembangkitan pada Gambar 2. Pembacaan secara horizontal (dari simpul paling kiri ke simpul paling kanan) menghasilkan semua 16 untai biner panjang 5 yang diawali oleh 0, yaitu: 00000, 00001, 00011, 00010, 00111, 00110, 00100, 00101, 01111, 01110, 01100, 01101, 01000, 01001, 01011, 01010. Generalisasi diberikan oleh lema berikut.



Gambar 2: Pohon pembangkitan yang diinduksi oleh $\Omega$, label simpul adalah indeks integer.

### Lema 1:

Pada level $n$, aturan suksesi membangkitkan secara ekshaustif untai biner panjang $n+1$ yang berawalan 0.

Pada setiap level, pembacaan secara vertikal dari atas ke bawah adalah 0, 01, 0110, 01101001, 0110100110010110. Untai-untai tersebut adalah untai Thue-Morse dengan panjang 1, 2, 4, 8, dan 16.

Secara umum, pada level $n$ diperoleh untai Thue-Morse dengan panjang $2^{n-1}$. Kondisi ini secara formal dinyatakan dalam teorema berikut.

### Teorema 1

Aturan suksesi $\Omega$ menginduksi untai Thue-Morse dengan panjang pada pohon pembangkitan di level $n$.

Sebagai implikasi dari Lema 1 dan Teorema 1, pembangkitan untai biner dengan panjang $n$ berdasarkan aturan suksesi menginduksi untai Thue-Morse dengan panjang $n$-1.

### Lema 2

Dalam pohon pembangkitan yang diinduksi oleh $\Omega$, jika pada level yang sama terdapat tiga simpul berurutan $abc$, maka salah satu kemungkinan $ab$ atau $bc$ merupakan produksi dari simpul yang sama pada level di atasnya.

*Bukti*. Setiap simpul pada pada pohon pembangkitan yang diinduksi $\Omega$ memproduksi tepat 2 simpul subordinat. Sehingga jelas bahwa jika terdapat 3 simpul berurutan, maka dua simpul berurut di antaranya merupakan produksi dari simpul yang sama pada level di atasnya.

Berdasar aturan suksesi $\Omega$, sebuah simpul memproduksi dua simpul subordinat yang berbeda, yaitu simpul berlabel $(2)_0$ dan $(2)_1$ atau $(2)_1$ dan $(2)_0$. Oleh karena itu, tidak didapati tiga simpul berurutan dengan label integer yang sama.

**Akibat-1** Dalam pohon pembangkitan yang diinduksi oleh $\Omega$, tiga simpul berurutan yang tidak dapat terjadi adalah $(2)_0(2)_0(2)_0$ dan $(2)_1(2)_1(2)_1$. Perluasan dari Akibat 1 menghasilkan Akibat 2 berikut.

**Akibat-2** Dalam pohon pembangkitan yang diinduksi oleh $\Omega$, tiga simpul berurutan tidak menghasilkan $(2)_0(2)_1(2)_0(2)_1(2)_0$, $(2)_1$ $(2)_0$ $(2)_1$ $(2)_0$ $(2)_1$, $(2)_0$ $(2)_0$ $(2)_1$ $(2)_0(2)_0$ dan $(2)_1$ $(2)_1$ $(2)_0$ $(2)_1$ $(2)_1$.

### Teorema 2

Diberikan $f$ sebuah faktor dari untai Thue-Morse dengan $|f| \leq 5$. Maka $f$ menghindari untai-untai 000, 111, 01010, 10101, 00100, dan 11011.

*Bukti*. $(2)_0(2)_0(2)_0$ dan $(2)_1(2)_1(2)_1$ masing-masing berkorespondensi dengan untai 000 dan 111. Demikian halnya $(2)_0(2)_1(2)_0(2)_1(2)_0$, $(2)_1$ $(2)_0$ $(2)_1$ $(2)_0$ $(2)_1$, $(2)_0$ $(2)_0$ $(2)_1$ $(2)_0(2)_0$ dan $(2)_1$ $(2)_1$ $(2)_0$ $(2)_1$ $(2)_1$ masing-masing berkorespondensi dengan untai 010101, 101010, 00100, dan 11011. Dikatikan dengan Lema 2, Akibat 1 dan Akibat 2, diperoleh bahwa 000, 111, 01010, 10101, 00100, dan 11011 bukan merupakan faktor dari untai Thue-Morse.

Teorema berikut merupakan generalisasi dari Teorema 2.

### Teorema 3

Diberikan $f$ sebuah faktor dari untai Thue-Morse dengan $|f| \leq 5$. Maka $f$ menghindari untai-untai sebagaimana pada Teorema 2 dan untai-untai berpola $1u1u1$ atau $0u0u0$, di mana $u$ adalah untai biner.

*Bukti*. Jika $|u| = 0$, maka pernyataan di atas identik dengan Teorema 2. Jika $|u| > 0$,, maka terdapat dua kemungkinan. Pertama, jika $|u|$ ganjil maka $1u1u1$ dan $0u0u0$ merupakan awal dari tiga blok yang sama secara berurutan. Berdasarkan Akibat 1, hal tersebut tidak dimungkinkan. Kedua, jika $|u|$ genap, maka pada $1u1u1$ dan $0u0u0$ terbentuk faktor 00 atau 11 yang merupakan produksi dari sebuah simpul di atasnya. Berdasarkan aturan suksesi $\Omega$ , hal tersebut tidak dimungkinkan

### Algoritma pembangkit

Berikut diberikan algoritma rekursif untuk membangkitkan untai biner berdasarkan aturan suksesi $\Omega$ yang didefinisikan pada bagian Hasil dan Pembahasan.

```
01 procedure Biner(k: integer, par_ind: {0,1})
02 global n: integer; b[n]: array of {0,1};
03 local i: integer;
04   if k=n+1 then Print();
05     else if par_ind=0 then
06       for i := 0 to 1
07             b[k] := i;
08             Biner(k+1,i);
09     else for i := 1 downto 0 step -1
10             b[k] := i;
11             Biner(k+1,i);
```

Gambar 3: Algoritma Biner

Variabel global $n$ dan $b[n]$ masing-masing menyimpan panjang dan untai biner yang dibangkitkan. Program utama menginisiasi nilai panjang biner $n$ dan $b[i] = 0$ untuk $1 \leq i \leq n$ . Panggilan rekursif pertama diberikan oleh Biner (2,0). Prosedur Biner ($k$, $par\_ind$) merupakan representasi algoritmis untuk aturan suksesi (diberikan oleh baris 5 - 11). Parameter $k$ dan $par\_ind$ (kependekan dari *parent index*) masing-masing menyatakan posisi kursor pada array $b$ dan nilai pada posisi $k - 1$ . *Value assignment* untuk $b[k]$ diberikan pada baris 07 dan 10. Panggilan rekursif berikutnya diberikan pada baris 08 dan 11, dan terus dilakukan sampai kondisi $k = n$ (baris 04).

Kompleksitas algoritma pembangkit yang efisien adalah $O(N)$, di mana $N$ adalah kardinalitas dari objek yang dihasilkan. Dalam hal algoritma pembangkit yang bersifat rekursif, kompleksitas yang diinginkan adalah *constant amortized time* (CAT) [11], yang berarti kompleksitas rata-rata untuk membangkitkan sebuah objek untuk $n \to \infty$ adalah $O(1)$. Untuk pembangkitan objek berukuran $n$, kompleksitas rata-rata diperoleh dari:

$$\frac{banyak\, panggilan\, rekursif}{banyak\, objek\, yang\, dibangkitkan}$$

untuk $n \to \infty$, limit dari rasion di atas adalah konstan.

### Teorema 4

Prosedur Biner memiliki kompleksitas CAT.

*Bukti*. Pada algoritma Biner, terdapat $2^{n-1}$ untai yang dibangkitkan dengan panggilan rekursif sebanyak $2^{n-1} - 1$. Untuk $n \to \infty$ diperoleh $\lim_{n\to\infty} \frac{2^{n-1}-1}{2^{n-1}} = 1$. Hasil tersebut mengkonfirmasi kompleksitas CAT .

## Penutup

Pada paper ini ditunjukkan bahwa pembangkitan untai biner berdasarkan aturan suksesi $\Omega$ menginduksi untai Thue-Morse. Setiap untai biner yang menghindari 000, 111, 00100, 11011, $0u0u0$, $1u1u1$, di mana $u$ adalah untai biner, merupakan faktor dari untai Thue-Morse.

Algoritma Biner yang merupakan representasi algoritmis dari aturan suksesi $\Omega$ membangkitkan untai biner dengan kompleksitas CAT. Sebagai penelitian lanjutan, disarankan untuk menginvestigasi pembangkitan ekshaustif untuk faktor-faktor dengan panjang $n$ dari untai Thue-Morse.

## Daftar Pustaka


[1] F. Barcucci, A. del Lungo, E. Pergola and R. Pinzani, " ECO: A Methodology for the Enumeration of Combinatorial Objects", Journal of Difference Equations and Applications, 5(4-5), hal. 435-490, 1999.

[2] J.-L Baril and P.-T Do, "ECO-Generation for p-generalized Fibonacci and Lucas permutations", Pure Mathematics and Applications (Pu.M.A.), 17(1-2), hal. 19–37, 2006.

[3] A. Bernini, E. Grazzini, E. Pergola and R. Pinzani, "A general exhaustive generation algorithm for Gray structures", Acta Informatica, 44, hal. 361-376, 2007.

[4] V. Vajnovszki, "Simple Gray codes constructed by ECO method (extended abstract)", JMIT 2008, 27-30 Agustus, Mons, Belgia, 2008.

[5] V. Vajnovszki, "Generating involutions, derangements, and relatives by ECO", Discrete Mathematics and Theoretical Computer Science, 12(1), hal. 109–122, 2010.

[6] A. Thue, "Uber unendliche Zeichenreihen", Norske vid. Selsk. Skr. Mat. Nat. Kl, 7, hal. 1–22, 1906. Dicetak kembali

dalam Selected mathematical papers of Axel Thue, editor T. Nagell, Universitetsforlaget, Oslo, hal. 139-158, 1977.

[7] S.J. Brams and A.D. Taylor, “An Envy-Free Cake Division Protocol”, The American Mathematical Monthly, Mathematical Association of America, 102 (1), hal. 9-18, 1995.

[8] I.I. Palacios-Huerta, “Tournaments, Fairness and the Prouhet-Thue-Morse Sequence”, Economic Inquiry, 50(3), hal. 848-849, 2012.

[9] A. Bernini, S. Bilotta, R.Pinzani, A. Sabri and V. Vajnovszki, “Reflected Gray codes for q-ary words avoiding a given factor”, Acta Informatica, 52(7), 573-592, 2015.

[10] J.P. Allouche and J. Shallit, “The ubiquitous Prouhet-Thue-Morse sequence”. Artikel dalam: Ding C., Helleseth T., Niederreiter H. (editor), Sequences and their Applications. Discrete Mathematics and Theoretical Computer Science. Springer, London, 1999.

[11] D.R. Van Baronaigien and F. Ruskey,”Efficient generation of subsets with a given sum”, Journal of Combinatorial Mathematics and Combinatorial Computing, 14, hal. 87-96, 1993.