Jurnal Ilmiah KOMPUTASI, Volume 17 No : 1, Maret 2018, p-ISSN 1412-9434/e-ISSN 2549-7227

# Matriks Insidensi Dari Graf Cayley

Latifah

STMIK Jakarta STI&K
Jl. BRI No. 17 Radio Dalam Kebayoran Baru – Jakarta 12140
E-mail: latifah@jak-stik.ac.id

**Abstrak**

Matriks merupakan salah satu cara yang berguna untuk merepresentasikan suatu graf kedalam suatu komputer. Dalam banyak aplikasi teori Graf seperti pada analisis jaringan elektrik dan Riset Operaional matriks juga merupakan cara yang alami untuk menyatakan suatu problema. Salah satu jenis graf yang mempunyai banyak sifat keistimewaan adalah graf Cayley. Graf Cayley merupakan graf dengan sifat simetri, berderajat konstan dan mempunyai jalur Hamiltonian. Tulisan ini membahas matriks insidensi dari Graf Cayley, dengan menelusuri setiap ruas yang berkaitan dengan suatu simpul. Dari matriks insidensi dapat dilihat keterhubungan antara tiap simpul dan ruas dalam graf.

***Kata Kunci*** : Matriks insidensi, Graf Cayley, keterhubungan.

## Pendahuluan

Representasi suatu Graf seringkali disukai dalam bentuk gambar, namun demikian representasi lain yang lebih baik untuk digunakan dalam pemrosesan komputasi adalah dengan menggunakan matriks. Hasil dari matriks dapat diaplikasikan untuk mempelajari sifat sifat structural Graf dilihat dari sudut pandang secara aljabar [1].

Terdapat 2 buah jenis matriks representasi yang seringkali digunakan dalam teori Graf, yaitu matriks ajasensi dan matriks insidensi [2]. Kedua matriks ini menyatakan keterhubungan antara setiap simpul pada graf dan keterhubungan antara simpul dan ruas pada Graf [2].

Banyak jenis jenis graf yang mempunyai sifat istimewa, salah satunya adalah Graf Cayley. Graf Cayley mempunyai sifat khusus yang istimewa seperti sifat simetri, memiliki derajat simpul konstan dan mempunyai jalur Hamiltonian [3]. Representasi matriks dari graf Cayley memperlihatkan keterhubungan antara simpul dan ruas dari Graf Cayley yang sangat berguna untuk memberikan informasi mengenai bentuk geometri Graf, misalnya menyatakan derajat dari Graf tersebut atau menyatakan simpul yang terisolasi atau tidak [1].

## Tinjauan Pustaka

### Definisi 1:

Suatu Graf G, lengkapnya ditulis G(V, E) adalah koleksi atau pasangan dua himpunan, yaitu:

1. Himpunan V yang elemennya disebut simpul atau titik atau vertex atau point atau node.
2. Himpunan E yang merupakan pasangan tak terurut dari simpul, disebut ruas atau rusuk atau sisi atau edge atau line [2].

### Definisi 2:

Matriks Ajasensi dari Graf G tanpa ruas sejajar adalah matriks $\mathrm{A} = (\mathrm{a_{ij}})$ berukuran $n \times n$, $n$ banyaknya simpul dengan:
$\mathrm{a_{ij}} = 1$ bila ada ruas $(\mathrm{v_i}, \mathrm{v_j})$
$= 0$ dalam hal lain [2].
Untuk graf dengan ruas sejajar, matriks ajasensi didefinisikan sebagai berikut:
$\mathrm{a_{ij}} = \mathrm{p}$ bila ada p ruas $(\mathrm{v_i}, \mathrm{v_j})$
$= 0$ dalam hal lain [2].

### Definisi 3:

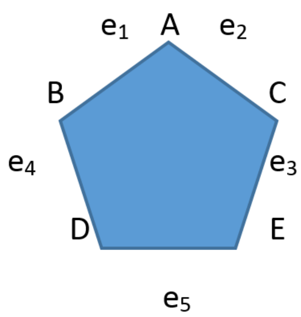
Misalkan $G$ adalah graf dengan $n$ simpul, ruas $e$ dan tidak mempunyai *self loop*. Definisikan matriks $n \times e$ yaitu matriks A = ($\mathrm{a_{ij}}$) dengan $n$ baris menyatakan $n$ simpul dan kolom $e$ berkaitan dengan ruas $e$. Elemen dari matriks A :

$\mathrm{a_{ij}} = 1$ jika ruas ke $j$ insiden pada simpul ke $i$

$= 0$ dalam hal lain

Matriks insidensi hanya berisikan 2 buah elemen 0 dan 1. Matriks yang demikian disebut matriks biner atau matriks (0,1) [1]. Jika diberikan matriks insidensi maka secara geometric graf tersebut dapat dibuat, demikian pula sebaliknya apabila suatu graf dinyatakan dalam bentuk geometri, maka matriks insidensi nya dapat pula dibuat [1].

Contoh: Diketahui graf G(V,E) sebagai berikut:




Gambar 1: Graf dengan 5 ruas dan 5 simpul

Adapun matriks insidensinya adalah sebagai berikut:

Tabel 1: Matriks insidensi dari Graf gambar 1

| | $e_1$ | $e_2$ | $e_3$ | $e_4$ | $e_5$ |
|---|---|---|---|---|---|
| **A** | 1 | 1 | 0 | 0 | 0 |
| **B** | 1 | 0 | 0 | 1 | 0 |
| **C** | 0 | 1 | 1 | 0 | 0 |
| **D** | 0 | 0 | 0 | 1 | 1 |
| **E** | 0 | 0 | 1 | 0 | 1 |

Penyelidikan mengenai matriks insidensi A dapat dilihat sebagai berikut:

1. Karena setiap ruas insiden pada tepat 2 simpul, maka setiap kolom dari matriks A mempunyai tepat 2 elemen 1.

2. Banyaknya elemen 1 dari setiap baris sama dengan derajat simpul yang berkaitan.

3. Sebuah baris yang elemennya semua 0 oleh karena itu merupakan simpul terisolasi.

4. Ruas paralel dalam suatu Graf membuat 2 buah kolom yang sama dalam matriks insidensinya.

5. Jika suatu graf tidak terhubung dan mengandung dua buh komponen $g_1$ dan $g_2$, maka matriks insidensinya yaitu A(G) dari graf G dapat ditulis dalam bentuk diagonal A(G) $\begin{matrix} A(g_1) & 0 \\ 0 & A(g_2) \end{matrix}$

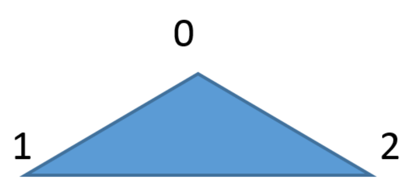
6. Permutasi dari 2 buah baris atau kolom dalam suatu matriks insidensi berkaitan dengan pelabelan kembali simpul simpul dan ruas ruas dari Graf yang sama [1].

## Definisi 4:

Misalkan $H$ adalah suatu group dan $S$ $C$ $H$ suatu himpunan pembentuk dari $H$ sedemikian sehingga $S = S$-1.. Suatu graf Cayley dari $H$ terhadap $S$ adalah graf tak berarah Cay($H$,$S$) dimana himpunan simpulnya adalah H dan ruas yang menghubungkan $g$ ke $gx$ untuk setiap pemilihan $g$ ε $H$ dan $x$ ε $S$ [4].

Contoh : jika $H = Z/nZ$ and $S$ = {1,-1} maka $C(H, S)$ adalah siklus pada $n$ simpul, $Z$ himpunan bilangan bulat.

Contoh lain:




Gambar 2: Graf Cayley modulo 3

## Definisi 5:

Derajat simpul suatu simpul v pada graf G, ditulis d(v) adalah banyaknya ruas yang menghubungi atau insidensi v [2].

## Definisi 6:

Suatu Graf G disebut terhubung, bila untuk setiap 2 simpul dari Graf G selalu terdapat jalur yang menghubungkan kedua simpul tersebut [5].

**Definisi 7:**

Suatu Jalur atau *path* adalah perjalanan yang semua simpul dalam barisan berbeda [2].

**Definisi 8:**

Suatu perjalanan atau walk pada suatu graf G adalah barisan simpul dan ruas berganti-ganti [2].

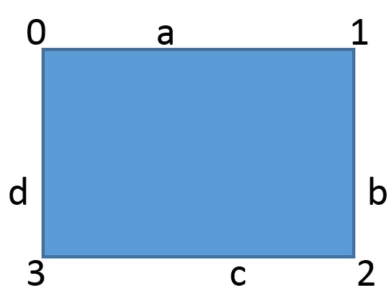
## Metode

Pada suatu graf Cayley, maka matriks insidensi yang dapat dibuat adalah dengan menggunakan langkah langkah sebagai berikut:

1. Tentukan banyaknya simpul pada Graf.
2. Hitung banyaknya ruas pada Graf.
3. Letakkan nama simpul pada graf sebagai nama nama baris dari matriks.
4. Letakkan nama nama ruas dari graf sebagai nama nama kolom dari matriks.
5. Isi elemen matriks dengan elemen 1 jika terdapat ruas yang mengubungkan simpul$i$ ke $j$.
6. Isi elemen matriks dengan elemen 0 jika tidak terdapat ruas yang menghubungkan simpul ke $i$ ke simpul $j$.
7. Ulangi langkah 5 dan 6 sampai semua simpul dan ruas yang berkaitan telah ditelusuri.
8. Matriks insidensi telah dibuat.

## Hasil

Graf berikut merupakan Graf Cayley modulo 4




Gambar 3: contoh Graf Cayley modulo 4

Matriks insidensi nya adalah:

Tabel 2: Matriks insidensi dari Graf Cayley gambar 3

| Ruas/simpul | **a** | **b** | **c** | **d** |
|---|---|---|---|---|
| **0** | 1 | 0 | 0 | 1 |
| **1** | 1 | 1 | 0 | 0 |
| **2** | 0 | 1 | 1 | 0 |
| **3** | 0 | 0 | 1 | 1 |

Langkah langkah pembuatan matriks insidensi Graf Cayley pada gambar 3:

1. Tulis simpul 0, 1, 2 dan 3 pada baris baris matriks/tabel.
2. Tulis ruas a, b, c dan d pada kolom kolom matriks/tabel.
3. Isikan angka 1 pada baris 1 (simpul 0) dan kolom 1 (ruas a), kemudian isikan 0 pada baris 1 kolom 2 (ruas b) karena tidak ada ruas yang menghubungkan simpul 0 dengan ruas b, selanjutnya isikan 0 pada baris 1 kolom 3, terakhir untuk baris 1 kolom 4 isikan 1.
4. Ulangi Langkah 3 untuk baris 2, 3 dan 4.
5. Matriks insidensi telah selesai dibuat.
6. Dapat dilihat bahwa banyaknya angka 1 pada matriks insidensi tabel 2 menyatakan pula derajat masing- masing simpul, yaitu 2.

## Penutup

Matriks insidensi merupakan matriks yang menyatakan apakah simpul yang berkaitan dapat dihubungkan dengan adanya ruas yang menghubungkan simpul tersebut. Dari matriks insidensi dapat dihitung derajat masing masing simpul. Dari matriks insidensi graf Cayley dapat diteliti lagi apakah terdapat suatu siklus terutama siklus Hamiltonian.

## Daftar Pustaka

[1] Narsingh Deo, “Graph Theory with Applications to Engineering and Computer Science”, Prentice Hall, 1987.

[2] Suryadi H.S., “Teori Graf Dasar”, Penerbit Gunadarma, 1995.

[3] Dave Witte Morris, "Open problem on Hamiltonian cycles in cayley graphs", Department of Mathematics and Computer Science, University of Lethbridge, 2006.

[4] Roman Cada, "Hamiltonian cycles in star Graphs", University of West Bohemia, 2009.

[5] Ciptarjo Imam, "Pengantar Graf", http://134738.yolasite.com/resources/17782333-Struktur-Data-Graph, diakses pada tanggal 7 Februari 2018.