

Pelabelan Jumlah Pada Graf Baling-Baling Bertangkai

Dina Indarti¹, Ias Sri Wahyuni², Sri Syamsiah³

^{1,2}Pusat Studi Komputasi Matematika, Universitas Gunadarma
e-mail: ¹dina_indarti@staff.gunadarma.ac.id, ²iaswahyuni@staff.gunadarma.ac.id
³Departemen Matematika, Fakultas MIPA, Universitas Indonesia
e-mail: ³sri.syamsiah@ui.ac.id

Abstrak

Pemanfaatan teori pelabelan graf sangat dirasakan peranannya, terutama pada sektor sistem komunikasi dan transportasi, navigasi geografis, radar, penyimpanan data komputer, dan desain sirkuit terintegrasi pada komponen elektronik. Salah satu jenis pelabelan adalah pelabelan jumlah. Penelitian mengenai pelabelan jumlah optimal untuk berbagai graf dirasakan sulit, bahkan untuk jenis graf yang sederhana. Oleh karena itu, penelitian ini membahas mengenai pelabelan jumlah pada graf sederhana, berhingga dan tak berarah baru yang merupakan pengembangan dari graf bintang. Graf tersebut dinamakan graf baling-baling bertangkai. Selanjutnya, pada graf baling-baling bertangkai dilakukan konstruksi pelabelan jumlah. Graf baling-baling bertangkai terbukti merupakan graf jumlah dengan bilangan jumlahnya adalah 1.

Kata Kunci : bilangan jumlah, pelabelan jumlah, graf baling-baling bertangkai.

Pendahuluan

Teori graf merupakan salah satu pokok bahasan bidang matematika kombinatorik yang banyak digunakan untuk menyederhanakan penyelesaian suatu masalah, khususnya masalah-masalah yang berkaitan dengan jaringan, perjalanan, dan aliran. Dengan merepresetasikan masalah dalam bentuk graf, permasalahan akan lebih mudah untuk dipahami. Dalam kehidupan sehari-hari banyak persoalan yang diimplementasikan dengan graf, antara lain pada bidang riset operasi, aljabar, ilmu komputer dan kimia.

Teori graf diperkenalkan oleh seorang matematikawan asal Swiss yang bernama Leonhard Euler pada tahun 1766. Pada saat itu, graf digunakan untuk menyelesaikan permasalahan mengenai jembatan Königsberg. Di kota Königsberg terdapat sungai yang membelah kota sehingga menjadi empat daratan yang terpisah. Keempat daratan tersebut dihubungkan oleh tujuh jembatan. Warga kota Königsberg ingin mengetahui apakah mungkin melewati semua jembatan tepat sekali dan kembali ke tempat awal. Dengan memodelkan

masalah tersebut menggunakan graf dan menggunakan beberapa konsep mengenai teori graf, Euler telah membuktikan bahwa jawabannya tidak mungkin. Pelabelan graf merupakan salah satu topik dalam teori graf. Sampai saat ini, pemanfaatan teori pelabelan graf sangat dirasakan peranannya, terutama pada sektor sistem komunikasi dan transportasi, navigasi geografis, radar, penyimpanan data komputer, dan desain sirkuit terintegrasi pada komponen elektronik. Secara informal, pelabelan pada suatu graf diartikan sebagai penempatan bilangan bulat pada elemen-elemen dari suatu graf, seperti simpul, busur, atau keduanya sesuai dengan suatu ketentuan.

Pelabelan graf diperkenalkan pertama kali oleh Sedláček pada tahun 1964 (Gallian, 2009). Sampai saat ini, ada beberapa jenis pelabelan graf yang telah dikembangkan, diantaranya adalah pelabelan jumlah, pelabelan harmonis, pelabelan total tak beraturan, pelabelan ajaib, dan pelabelan anti ajaib. Dalam pelabelan juga telah banyak mengalami perkembangan baik dari bentuk pelabelannya maupun dari bentuk graf yang dilabeli.

Pelabelan jumlah pada graf diperkenalkan oleh Harary pada tahun 1990 (Harary, 1990). Sejak saat itu, penelitian mengenai pelabelan jumlah optimal untuk berbagai graf dirasakan sulit, bahkan untuk jenis graf yang sederhana. Oleh karena itu, dalam penelitian ini bertujuan untuk mendefinisikan suatu graf berhingga, sederhana, dan tak berarah yang baru. Selanjutnya, pada graf tersebut diterapkan konsep pelabelan jumlah. Selain itu, penelitian ini membuktikan bahwa pelabelan jumlah yang dilakukan pada graf baru yang didefinisikan adalah optimal.

Tinjauan Pustaka

Penelitian mengenai pelabelan jumlah pada graf terus berkembang. Pelabelan jumlah pada jenis graf lengkap (K_n), graf bintang (S_n), graf pohon (T_n), graf lingkaran (C_n), graf kipas (F_n), graf roda (W_n), Cocktail Party Graph, dan Graf Lengkap Bipartite, ($K_{m,n}$, $m < n$) telah dilakukan. Pelabelan jumlah pada jenis graf lengkap dilakukan oleh Harary, tahun 1990 dan Bergstrand, dkk tahun 1989. Graf lengkap adalah graf sederhana yang setiap simpulnya mempunyai sisi ke semua simpul lainnya.

Pelabelan jumlah optimal pada graf lengkap untuk $n = 2$ mempunyai bilangan jumlah 1 (Harary, 1990) dan untuk $n \geq 3$ mempunyai bilangan jumlah $2n - 3$.

Graf bintang adalah graf terhubung dengan sejumlah simpul yang masing-masing hanya terhubung pada satu simpul tetap. Simpul tetap ini disebut simpul pusat. Pelabelan jumlah pada graf bintang untuk $n \geq 2$ mempunyai bilangan jumlah 1 (Harary, 1990). Graf sederhana lainnya yaitu graf pohon. Graf pohon adalah graf yang tidak mengandung subgraf berbentuk lingkaran. Pelabelan jumlah optimal pada graf pohon untuk $n \geq 3$ mempunyai bilangan jumlah 1.

Graf lingkaran adalah graf sederhana yang setiap simpulnya berderajat dua. Graf lingkaran dengan n simpul dilambangkan dengan C_n . Pelabelan jumlah optimal pada graf pohon untuk $n = 3$ mempunyai bilangan jumlah 2, untuk $n = 4$ mempunyai bilangan jumlah 3, dan untuk $n > 4$ mempunyai bilangan jumlah 2 (Harary, 1990). Graf lingkaran dengan 3 simpul dapat dilabelkan $\{1,2,3\}$. Dua simpul terisolasinya yaitu 4 dan 5. Graf lingkaran dengan 4 simpul $\{x_1, x_2, x_3, x_4\}$ dan 4 sisi

$\{x_1x_2, x_2x_3, x_3x_4, x_4x_1\}$ dapat dilabelkan sebagai berikut:

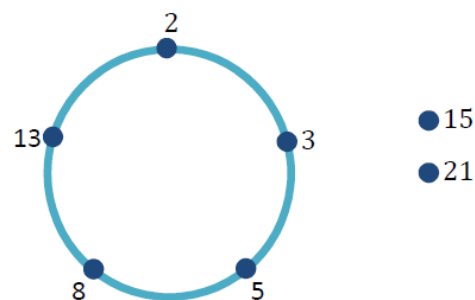
$$L(x_1) = 5, L(x_2) = 7, L(x_3) = 6, L(x_4) = 8.$$

Tiga simpul terisolasinya yaitu 12, 13, dan 14. Graf lingkaran yang mempunyai simpul lebih dari empat ($n > 4$) dengan $L(x_1) = a, L(x_2) = b, a, b \in \mathbb{N}$, pelabelannya sebagai berikut:

$$L(x_i) = L(x_{i-1}) + L(x_{i-2})$$

dengan simpul terisolasi dilabeli dengan $L(x_{(n-1)}) + L(x_n)$ dan $L(x_n) + L(x_1)$.

Contoh konstruksi pelabelan jumlah graf lingkaran sebagai berikut:



Gambar 1: Pelabelan Jumlah Graf Lingkaran

Graf kipas untuk $n = 4$ mempunyai bilangan jumlah dan untuk $n \geq 6$, dimana n ganjil mempunyai bilangan jumlah 3 (Harary, 1990). Graf roda untuk $n = 4$ mempunyai bilangan jumlah 4 (Fernau et al, 2008, untuk $n \geq 6$, n ganjil mempunyai bilangan jumlah n (Sutton dan Miller, 2001), dan untuk $n \geq 6$, n genap mempunyai bilangan jumlah $n/2 + 2$ (Miller et al, 1998b). Tabel 1 merupakan daftar dari bilangan jumlah untuk beberapa graf yang telah diketahui sebelumnya.

Metode Penelitian

Graf terdiri atas suatu himpunan tak kosong V yang anggotanya disebut simpul dan suatu himpunan berhingga E yang berisi pasangan-pasangan tak teurut dari simpul-simpul dan anggotanya yang disebut busur. Himpunan busur dapat berupa himpunan kosong. Graf G dikatakan graf berhingga jika banyaknya simpul

berhingga. Gelung (loop) adalah busur yang memiliki ujung yang sama. Dua busur pada suatu graf dikatakan busur ganda jika kedua busur tersebut memiliki simpul-simpul ujung yang sama. Graf yang tidak memiliki gelung dan busur ganda disebut graf sederhana. Suatu graf G disebut graf berarah jika G terdiri dari himpunan simpul V dan himpunan busur E yang anggota himpunan busur E merupakan pasangan terurut dari simpul-simpul di V . Jika anggota himpunan busur E bukan merupakan pasangan terurut dari simpul, maka graf G disebut graf tak berarah. Pada penelitian ini digunakan graf sederhana, berhingga, dan tak berarah.

Pelabelan pada suatu graf adalah sebarang pemetaan atau fungsi yang memasangkan unsur-unsur graf (simpul dan sisi) ke himpunan bilangan bulat positif. Jika domain dari pemetaan adalah simpul, maka pelabelan disebut pelabelan simpul. Jika domainnya adalah sisi, maka disebut pelabelan sisi, dan jika domainnya simpul dan sisi, maka disebut pelabelan total.

Salah satu jenis pelabelan yaitu pelabelan jumlah. Misalkan G adalah graf dengan himpunan simpul $V(G)$ dan himpunan busur $E(G)$, dengan $|V(G)|$ dan $|E(G)|$ masing-masing menyatakan banyak simpul dan busur pada graf G . Pelabelan jumlah merupakan suatu pemetaan λ dari $V(G)$ ke bilangan bulat positif sedemikian sehingga untuk sembarang dua simpul, $u, v \in V(G)$ dengan label masing-masing yaitu $\lambda(u)$ dan $\lambda(v)$, (uv) merupakan suatu busur jika dan hanya jika $\lambda(u) + \lambda(v)$ merupakan label pada simpul lainnya di $V(G)$. Graf G yang mempunyai pelabelan jumlah optimal disebut graf jumlah. Berdasarkan definisi tersebut, setiap simpul dengan label terbesar tidak mungkin bertetangga dengan simpul lain di graf tersebut, maka setiap graf jumlah selalu memuat minimal 1 simpul terisolasi. Banyaknya simpul terisolasi minimal yang harus ditambahkan pada G agar G merupakan graf jumlah disebut bilangan jumlah dari G yang dinotasikan sebagai $\sigma(G)$. Suatu graf jumlah bersama dengan simpul terisolasi yang paling sedikit dinamakan graf jumlah yang optimal.

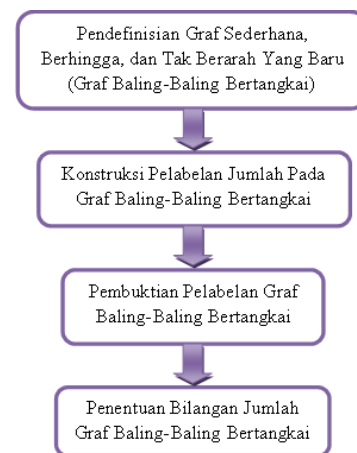
Pada penelitian ini didefinisikan suatu jenis graf sederhana, berhingga dan tak berarah baru yang merupakan pengembangan dari graf bintang. Selanjutnya, pada graf tersebut di-

lakukan konstruksi pelabelan jumlah. Setelah dilakukan konstruksi pelabelan jumlah, penelitian ini membuktikan bahwa konstruksi yang dilakukan optimal dengan bilangan jumlah paling sedikit sehingga diperoleh graf jumlah optimal yang baru.

Implementasi Metode

Bagan berikut menggambarkan implementasi metode pada penelitian ini.

Tahapan yang dilakukan dalam penelitian ini adalah :



Gambar 2: Diagram Alur Penelitian

Hasil dan Pembahasan

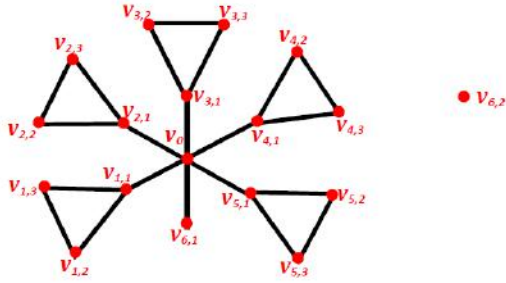
Graf bintang merupakan salah satu contoh graf jumlah (Harary, 1990). Graf tersebut dapat dikembangkan membentuk suatu jenis graf baru dengan menambahkan suatu segitiga pada setiap ujung simpul graf bintang dan satu buah busur dari titik pusat graf bintang. Dengan penambahan tersebut akan membentuk graf baru yang berbentuk seperti baling-baling yang mempunyai sebuah tangkai. Oleh karena itu, graf baru tersebut dinamakan graf baling-baling bertangkai.

Definisi

Graf baling-baling bertangkai merupakan pengembangan dari graf bintang. Graf baling-baling diperoleh dengan cara menambahkan suatu segitiga (C_3) pada setiap ujung simpul

pada graf bintang sehingga salah satu titik sudut segitiga (C_3) tersebut berhimpit dengan ujung simpul pada graf bintang lalu ditambahkan lagi satu busur dari titik pusat. Graf baling-baling bertangkai dengan n buah segitiga (C_3) dinotasikan sebagai $B_{3,n}$.

Gambar berikut merupakan contoh dari graf baling-baling bertangkai yaitu Graf $B_{3,5}$.



Gambar 3: Graf $B_{3,5}$

Dengan menggunakan konsep pelabelan jumlah yang telah dilakukan (Harary, 1990), Teorema 1 menunjukkan pelabelan jumlah pada graf baling-baling bertangkai optimal sehingga graf baling-baling merupakan suatu graf jumlah.

Teorema 1

Setiap graf baling-baling bertangkai, $B_{3,n}$, adalah graf jumlah.

Bukti: Misalkan v_0 menyatakan simpul pusat, $v_{i,j}$ menyatakan simpul ke- j pada segitiga ke- i , dengan $i = 1, 2, \dots, n$ dan $j = 1, 2, 3$. Pertama, diberi label pada v_0 dan $v_{1,1}$, dengan $v_0, v_{1,1} > 0$. Lalu, label $v_{1,2}$ dengan $v_0 + v_{1,1}$, label $v_{1,3}$ dengan $v_{1,1} + v_{1,2}$. Lalu dilanjutkan pelabelan untuk segitiga ke-2, label $v_{2,1}$ dengan $v_{1,1} + v_{1,3}$, label $v_{2,2}$ dengan $v_{1,2} + v_{1,3}$, dan seterusnya, sehingga diperoleh:

$$v_{i,1} = v_{i-1,1} + v_{i-1,3}$$

$$v_{i,2} = v_{i-1,2} + v_{i-1,3}$$

$$v_{i,3} = v_{i,1} + v_{i,2}$$

Oleh karena itu, label terbesar yang digunakan yaitu $v_{n+1,1} = v_{n,1} + v_{n,3}$. Dikarenakan konstruksi pelabelan menggunakan konsep barisan bilangan Fibonacci (Munir, 2001) maka hanya akan ada 1 titik terisolasi $v_{n+1,2} = v_{n,2} + v_{n,3}$. Dengan konstruksi pelabelan tersebut diperoleh rumus pelabelan sebagai berikut:

$$\begin{aligned} v_{i,1} &= \frac{3^{i-1}-1}{2}v_0 + 3^{i-1}v_{1,1} \\ v_{i,2} &= \frac{3^{i-1}+1}{2}v_0 + 3^{i-1}v_{1,1} \\ v_{i,3} &= 3^{i-1}v_0 + 2 \cdot 3^{i-1}v_{1,1} \end{aligned} \quad (1)$$

dengan $i = 1, 2, \dots, n$ dan rumus untuk label terbesar yaitu

$$v_{n+1,1} = \frac{3^n-1}{2}v_0 + 3^n v_{1,1}$$

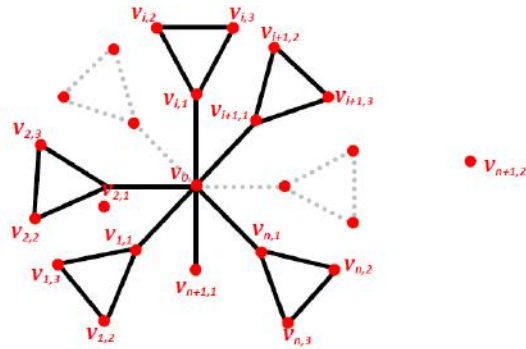
Sehingga rumus pelabelan untuk 1 titik terisolasi diperoleh sebagai berikut:

$$v(n+1,2) = (3^n + 1)/2v_0 + 3^n v_{1,1}$$

Untuk memeriksa bahwa tidak ada konstruksi pelabelan yang tidak diinginkan, maka dilakukan pemeriksaan sebagai berikut:

1. Pelabelan antara segitiga ke- i dengan segitiga ke- $i+1$.

Pelabelan pada segitiga ke- i yaitu $\{v_{i,1}; v_0 + v_{i,1}; v_0 + 2v_{i,1}\}$ dan pelabelan pada segitiga ke- $i+1$ yaitu $\{v_0 + 3v_{i,1}; 2v_0 + 3v_{i,1}; 3v_0 + 6v_{i,1}\}$.



Gambar 4: Graf $B_{3,n}$

Dengan memperhatikan segitiga ke- i dan ke- $i+1$ pada Gambar 4, hasil penjumlahan 2 simpul $v_{i,1}$ dan $v_{i+1,1}$ yaitu $v_0 + 4v_{i,1}$, karena nilai $v_{i,1} > v_0$ dan sifat bilangan Fibonacci diperoleh $v_{i+1,1} = v_0 + 3v_{i,1} < v_0 + 4v_{i,1}$ dan $v_0 + 4v_{i,1}$ bukanlah anggota dari barisan bilangan Fibonacci yang digunakan dalam konstruksi pelabelan yang terlihat dari persamaan (1) sehingga $v_0 + 4v_{i,1}$ tidak akan ada pada label simpul manapun. Sama halnya untuk hasil penjumlahan simpul $v_{i,1}$ dengan simpul lain pada segitiga ke- $i+1$. Hal ini

juga berlaku untuk $v_{i,2}$ dan $v_{i,3}$ jika dijumlahkan dengan simpul lain pada segitiga ke- $i+1$, tidak akan terhubung oleh suatu busur karena sifat bilangan Fibonacci dan hasil penjumlahannya bukan merupakan anggota barisan bilangan Fibonacci. Oleh karena itu, hasil penjumlahan 2 simpul pada segitiga yang berbeda memang tidak terhubung karena hasil penjumlahannya bukan merupakan label pada simpul manapun, sehingga tidak akan ada busur antara segitiga ke- i dengan segitiga ke- $i+1$.

2. Pelabelan antara v_0 dengan $v_{i,2}$, v_0 dengan $v_{i,3}$.

$$v_{i,2} = v_0 + v_{i,1}$$

$$v_{i,3} = v_0 + 2v_{i,1}$$

diperoleh $v_{i,2} + v_0 = 2v_0 + v_{i,1}$ dan $v_{i,3} + v_0 = 2v_0 + 2v_{i,1}$. Dikarenakan sifat bilangan Fibonacci dan $v_{i,2} = v_0 + v_{i,1} < 2v_0 + v_{i,1} < v_{i,1} + v_{i,2} = v_0 + 2v_{i,1} = v_{i,3}$ maka $2v_0 + v_{i,1}$ tidak mungkin merupakan label dari simpul manapun, sehingga tidak akan ada busur antara v_0 dengan $v_{i,2}$. Sama halnya untuk v_0 dengan $v_{i,3}$, dikarenakan sifat bilangan Fibonacci dan $v_{i,3} = v_0 + 2v_{i,1} < 2v_0 + 2v_{i,1} < v_{i,1} + v_{i,3} = v_0 + 3v_{i,1} = v_{i+1,1}$ maka $2v_0 + 2v_{i,1}$ tidak mungkin merupakan label dari simpul manapun, sehingga tidak akan ada busur antara v_0 dengan $v_{i,3}$.

Berdasarkan pembuktian teorema 1 sebelumnya diperoleh teorema berikut.

Teorema 2

Graf baling-baling bertangkai, $B_{3,n}$ mempunyai bilangan jumlah 1.

Penutup

Dalam penelitian ini telah dibuktikan bahwa dapat ditemukan pelabelan jumlah pada graf baling-baling bertangkai dengan baling-baling berbentuk segitiga (C_3), $B_{3,n}$. Graf baling-baling bertangkai, $B_{3,n}$ mempunyai bilangan jumlah (sum number) 1. Pelabelan jumlah

pada graf baling-baling bertangkai dengan baling-baling berbentuk lainnya mungkin dapat ditemukan pula. Pelabelan jumlah pada gabungan graf baling-baling bertangkai dapat pula ditemukan dengan menggunakan cara konstruksi pelabelan yang serupa pada graf baling-baling bertangkai. Selain itu, pelabelan jumlah pada bentuk graf lainnya yang sederhana juga mungkin masih dapat ditemukan.

References

- [1] (Ellingham, 1993) Ellingham, M.N. 1993. Sum graphs from trees. *Ars Combin.*, 35:335-349.
- [2] (Fernau et al, 2008) Fernau, H., Ryan, J. F. dan Sugeng, K. A. 2008. A sum labelling for the generalised friendship graph. *Discrete Math.*, 308:734-740.
- [3] (Gallian, 2009) Gallian, J.A. 2009. A Dynamic Survey of Graph Labeling. *The Electronic Journal of Combinatorics* 16(1):1-219.
- [4] (Harary, 1990) Harary, F. 1990. Sum graphs and difference graphs. *Congressus Numerantium*, 72:101-108.
- [5] (Miller et al, 1998a) Miller, M., Ryan, J. dan Smyth, W. 1998. The sum number of the cocktail party graph. *Inst. Combin. Appl.*, 22:79-90.
- [6] (Miller et al, 1998b) Miller, M., Ryan, J., Slamin dan Smyth, W. 1998. Labelling wheels for the minimum sum number. *J. Combin. Math. Combin. Computing* 28, 289-297.
- [7] (Munir, 2001) Munir, R. 2001. *Matematika Diskrit, Informatika, Bandung*.
- [8] (Pyaktin, 2001) Pyatkin, A. 2001. New formula for the sum number for the complete bipartite graphs. *Discrete Math.*, 239:155-160.
- [9] (Sutton dan Miller, 2001) Sutton, M dan Miller, M. 2001. On the sum number of wheels. *Discrete Math.*, 232:185-188.